CÀLCUL I ACTUALITZACIÓ EFICIENT DE LA MATRIU DE TREBALL DEL PROBLEMA DE FLUXOS MULTIARTICLE AMB CONSTRICCIONS A BANDA A TRAVÉS DEL PARTICIONAMENT PRIMAL

Jordi Castro
Departament d'EIO
Secció Informàtica
UPC

DATA 09/93
DR 93/03

CÀLCUL I ACTUALITZACIÓ EFICIENT DE LA MATRIU DE TREBALL DEL PROBLEMA DE FLUXOS MULTIARTICLE AMB CONSTRICCIONS A BANDA A TRAVÉS DEL PARTICIONAMENT PRIMAL

Abstract: *This work presents an efficient computation and update of the working matrix when solving the multicommodity flow problem through primal partitioning. In the solution of this problem the management of this working matrix is paramount. An extension to the original formulation of the multicommodity flow problem (such as the addition of side constraints) is considered in this work. This implies that a working matrix must be different handled. An efficient procedure to compute this new working matrix is presented. The update of this working matrix must also deal with the added side constraints. The formulae required to perform this update are also developed. The main feature of this update is the variable dimension of the working matrix at each iteration. The fact of having to remove (or add) rows and columns in the updating process could produce a poor performance of the procedure. The update here considered overcomes these undesirable changes of dimension in the working matrix.*

Keywords: Multicommodity Network Flows, Network Simplex Methods, Primal Partitioning, Side Constraints.

1. Introducció.

El problema de fluxos multiarticle en la seva formulació clàssica pot ser descrit com:

$$\min_{X_1, X_2, \ldots, X_K} \quad h(X_1, X_2, \ldots, X_K) \tag{1}$$

$$\text{subj. a} \quad AX_k = R_k \qquad k = 1, \ldots, K \tag{2}$$

$$\underline{0} \leq X_k \leq \overline{X}_k \qquad k = 1, \ldots, K \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{K} X_k \leq T \tag{4}$$

on $X_k \in \mathbb{R}^n$, (n: nombre d'arcs) és el vector de fluxos de l'article k ($k = 1, \ldots, K$) —essent K el nombre total d'articles del problema—, i $h : \mathbb{R}^{K \times n} \to \mathbb{R}^1$ és una funció real amb variable vectorial. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m: nombre de nodes) és la matriu amb les constriccions de xarxa. Les constriccions (3) són límits simples dels fluxos essent $\overline{X}_k \in \mathbb{R}^n, k = 1, \ldots, K$ els límits superiors i les constriccions (4) són les constriccions de capacitat mútua, on $T \in \mathbb{R}^n$.

En aquest treball es considerarà aquest problema ampliat amb unes constriccions a banda lineals addicionals, de la forma:

$$L \leq \sum_{k=1}^{K} L_k X_k \leq U \tag{5}$$

on L_k: $L_k \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $k = 1, \ldots, K$, i $L, U \in \mathbb{R}^p$ (p: nombre de constriccions a banda). Per tant el nostre problema final serà:

$$\min_{X_1, X_2, \ldots, X_K} (1) \quad ; \quad \mathit{subj.\ a} \quad (2-5) \tag{6}$$

Per tal de resoldre aquest problema aprofitant l'estructura de xarxa hi ha diverses tècniques (descomposició dictada per preus, particionament primal, descomposició simplicial, ...). El mètode que suposarem utilitzat en aquest treball serà el de particionament primal. Així mateix, segons la funció $h(X_1, X_2, \ldots, X_K)$ sigui o no lineal haurem d'usar tècniques de programació lineal o no lineal per resoldre aquest problema. Una descripció detallada de la metodologia a seguir en cas de ser $h()$ lineal pot ser trobada a [5]. En cas de tractar-se d'una funció no lineal, [2] pot ser consultat.

Cal dir abans de començar que en aquest treball no es pretén detallar la metodologia del particionament primal i es suposa que el lector té un cert coneixement sobre el mateix. Tan sols es farà referència a aquells aspectes directament relacionats amb la denominada matriu de treball del particionament primal (que és el tema d'estudi d'aquest document).

2. La matriu de treball.

En aquesta secció introduirem el concepte de matriu de treball del mètode del particionament primal, així com la seva motivació. Començarem introduint alguns conceptes previs.

2.1. Conceptes previs.

Donat que les constriccions (2), (4) i (5) de (6) són lineals podem considerar la matriu A de constriccions del problema. Per cada variable (és a dir, per cada flux) j del problema la columna associada A^j de A té els següents elements no nuls:

$$(A^j)^t = \left(\underbrace{\ldots \overset{\overset{k}{\downarrow}}{1} \ldots \overset{\overset{l}{\downarrow}}{-1} \ldots}_{Xarxa} \quad | \quad \underbrace{\ldots \overset{\overset{j}{\downarrow}}{1} \ldots}_{Cap.\ Mútua} \quad | \quad \underbrace{a_{j1} \ldots a_{jp}}_{Banda} \right)^t$$

on k i l identifiquen els nusos origen i destí de l'arc j. Pot observar-se com cada variable intervé en tres tipus de constriccions clarament diferenciades: les de xarxa, les de capacitat mútua i les constriccions a banda. Les constriccions de xarxa són d'igualtat i sempre estan actives. Les de capacitat mútua i a banda són de desigualtat i poden estar o no saturades (o actives). Per cada constricció de desigualtat cal afegir una variable tipus folga.

Tota base usant el mètode del particionament primal pot ser descomposada com segueix (veure [5] per una més complerta descripció):

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline L_1 & R_1 & 0 \\ \hline L_2 & R_2 & 0 \\ \hline L_3 & R_3 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

essent L_1, R_2 and $\mathbb{1}$ matrius quadrades, on:

• L_1 està associada a les constriccions de xarxa i arcs dels K arbres d'expansió mínima. La topologia d'aquesta matriu és:

$$L_1 = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_K \end{pmatrix}$$

essent cada B_k una matriu no-singular associada amb el k-èssim arbre d'expansió. L_1 pot ser representada a cada iteració per K arbres d'expansió mínima seguint la metodologia descrita a [1].

• R_1 està associada a les constriccions de xarxa i arcs complementaris dels K articles. Els arcs complementaris són arcs que no pertanyen a cap arbre d'expansió i són necessaris per preservar la no-singularitat de la base.

• L_2 està associada a les constriccions de capacitat mútua i a banda actives, pels arcs dels arbres d'expansió mínima.

• R_2 està associada a les constriccions de capacitat mútua i a banda actives, pels arcs complementaris.

• L_3 està associada a les constriccions de capacitat mútua i a banda inactives, pels arcs dels arbres d'expansió mínima.

• R_3 està associada a les constriccions de capacitat mútua i a banda inactives, pels arcs complementaris.

• $\mathbb{1}$ està associada a les folgues de les constriccions de capacitat mútua i a banda inactives (cal indicar que les constriccions quines folgues apareixen a la matriu $\mathbb{1}$ són tractades com inactives, encara que els valors de les folgues siguin zero).

2.2. Motivació de la matriu de treball.

Dins del procés d'optimització a cada iteració cal resoldre sistemes del tipus $Bx = b$ i $x^tB = b^t$. Tenint en compte la partició abans presentada de la base B i considerant una partició similar pels vector x i b observem quines operacions són necessàries per obtenir la solució dels dos sistemes:

2.2.1. Càlcul de $Bx = b$.

El sistema pot ser escrit com:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline L_1 & R_1 & 0 \\ \hline L_2 & R_2 & 0 \\ \hline L_3 & R_3 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline b_3 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicant per blocs obtenim:

$$L_1x_1 + R_1x_2 = b_1 \tag{7}$$
$$L_2x_1 + R_2x_2 = b_2 \tag{8}$$
$$L_3x_1 + R_3x_2 + x_3 = b_3 \tag{9}$$

Aïllant x_1 de (7) obtenim $x_1 = L_1^{-1}b_1 - L_1^{-1}R_1x_2$. Substituïnt aquest valor a (8) obtenim $L_2L_1^{-1}b_1 - L_2L_1^{-1}R_1x_2 + R_2x_2 = b_2$. Aïllant el valor de x_2 trobem la seva expressió:

$$x_2 = (R_2 - L_2L_1^{-1}R_1)^{-1}(b_2 - L_2L_1^{-1}x_1) \tag{10}$$

Coneixent x_2 el càlcul de x_1 és directament:

$$x_1 = L_1^{-1}b_1 - L_1^{-1}R_1x_2 \tag{11}$$

Pel que fa a x_3, un cop coneguts x_1 i x_2, directament fem:

$$x_3 = b_3 - L_3x_1 - R_3x_2 \tag{12}$$

Calculant consecutivament (10), (11) i (12) obtenim la solució del sistema.

2.2.2. Càlcul de $x^tB = b^t$.

El sistema pot ser escrit com:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline L_1 & R_1 & 0 \\ \hline L_2 & R_2 & 0 \\ \hline L_3 & R_3 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicant per blocs obtenim:

$$x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 = b_1 \tag{13}$$
$$x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 = b_2 \tag{14}$$
$$x_3 = b_3 \tag{15}$$

El valor x_3 es troba directament a partir de (15). Aïllant x_1 de (13) obtenim

$$x_1 = (b_1 - x_3 L_3 - x_2 L_2) L_1^{-1} \tag{16}$$

Usant (16) i (15) a (14) obtenim:

$$\begin{aligned}
(b_1 - b_3 L_3 - x_2 L_2) L_1^{-1} R_1 + x_2 R_2 + b_3 R_3 &= b_2 \\
(b_1 - b_3 L_3) L_1^{-1} R_1 + x_2 (R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1) &= b_2 - b_3 R_3 \\
\big((b_2 - b_3 R_3) - (b_1 - b_3 L_3) L_1^{-1} R_1\big)(R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1)^{-1} &= x_2 \qquad (17)
\end{aligned}$$

Resolent consecutivament (15), (17) i (16) obtenim la solució del sistema.

Com es pot observar als dos subapartats anteriors, per tal de trobar la solució als sistemes plantejats només cal invertir la submatriu L_1 i una matriu l'expressió de la qual és: $R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1$. Aquesta matriu serà anomenada *la matriu de treball* i la denotarem com *matriu* Q. Cal indicar que el fet d'haver d'invertir L_1 no suposa cap problema donat que, com ja vam fer notar a la secció 2.1, aquesta és una matriu diagonal per blocs, on cada bloc representa un arbre d'expansió. Com és ben sabut les solucions a sistemes d'aquests tipus poden ser trobades de forma immediata tenint en compte només l'estructura de l'arbre [5]. Per tant només resta tenir un tractament eficient de la matriu Q per tal de tenir solventat el càlcul dels dos sistemes anteriors, que és la part més costosa de tot el procés d'optimització al cas lineal, i força rellevant a la no lineal. En aquest sentit dos són els punts bàsics necessaris: tenir un procediment eficient de calcular la matriu Q i tenir una forma —igualment eficient— d'actualitzar-la per no haver d'invertir-la a cada iteració. Donat que la dimensió de la matriu Q en general és força menor que la de tota la base B, el fet de treballar amb la matriu de treball ens millora considerablement l'eficiència del mètode.

Les dos seccions següents tractaran els dos punts clau en treballar amb la matriu Q: com calcular-la (de forma eficient) i com actualitzar-la (també de forma eficient).

3. Càlcul de la matriu Q.

Recordem que l'expressió de la matriu Q és $Q = R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1$. Abans de continuar definirem els següents conceptes:

- A_{cb}: conjunt de constriccions a banda actives a la iteració actual.
- A_{cm}: conjunt de constriccions de capacitat mútua actives a la iteració actual.
- A: conjunt de constriccions (a banda i de capacitat mútua) actives, és a dir, $A = A_{cb} \cup A_{cm}$.
- $|C|$: nombre d'elements del conjunt qualsevol C.

Donat que, com abans s'ha esmentat, R_2 és una matriu quadrada i que les seves files estan associades a les constriccions actives i les seves columnes als arcs complementaris, directament tenim que R_2 és una matriu $|A| \times |A|$ (on $|A| = |A_{cm}| + |A_{cb}|$) i per tant el nombre d'arcs complementaris és igual a $|A|$. Recordant que el nombre de nodes de la xarxa és m i el nombre d'articles K, directament a partir de l'expressió de Q tenim la seva dimensió:

$$\begin{aligned}
&dim(Q) = dim(R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1)\\
&dim(Q) = (|A| \times |A|) - (|A| \times Km)(Km \times Km)(Km \times |A|)\\
&dim(Q) = (|A| \times |A|) - (|A| \times |A|)\\
&dim(Q) = (|A| \times |A|)
\end{aligned}$$

Anàlogament a com ocorre amb R_2, les files de Q es troben associades a les constriccions (a banda i capacitat mútua) actives, mentre que les seves columnes es troben associades amb els arcs complementaris. Agrupant les files associades amb constriccions a banda actives per una banda i les files associades amb constriccions de capacitat mútua actives per una altra, podem considerar la matriu Q dividida en dos submatrius, tal com ara $Q = \begin{bmatrix} Q_{cm} \\ Q_{cb} \end{bmatrix}$, essent Q_{cm} la submatriu quines files estan associades a constriccions $\in A_{cm}$ i Q_{cb} la submatriu quines files estan associades a constriccions $\in A_{cb}$ (on $dim(Q_{cm}) = |A_{cm}| \times |A|$ i $dim(Q_{cb}) = |A_{cb}| \times |A|$). Cal tenir en compte que aquesta divisió que s'ha fet a la matriu Q pot ser aplicada a la matriu R_2 i la matriu L_2 (ja que les seves files estan associades amb constriccions actives). Per tant bé podríem escriure el càlcul de Q com

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{cm} \\ Q_{cb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{2_{cm}} \\ R_{2_{cb}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{2_{cm}} \\ L_{2_{cb}} \end{bmatrix} L_1^{-1} R_1$$

Cal observar que el terme $L_1^{-1} R_1$ no depén per res del tipus de constricció activa associat amb les files de Q. Cada columna $R_1^j,\ j = 1, \ldots, |A|$ ens indica la connexió de l'arc complementari j dins de l'arbre d'expansió mínima que li pertoca (en funció de l'article associat amb l'arc complementari j); és a dir la columna R_1^j només té un $+1$ i un -1 a les posicions k i l essent k el node origen de l'arc j i l el node destí. Donada l'estructura particular de R_1 i L_1, solucionar $L_1^{-1} R_1^j$ per l'arc j concret que pertany a l'article k és equivalent a solucionar $B_k^{-1} R_1^j$ essent B_k^{-1} l'arbre d'expansió mínima de l'article k. La solució és $B_k^{-1} R_1^j = V_j$, on $V_{j_i},\ i = 1, \ldots, m$ (essent m el nombre de nodes) s'obté directament com:

$$\underset{i=1,\ldots,m}{V_{j_i}} = \begin{cases} +1: & \text{si l'arc de l'arbre que hi ha per sobre del node } i \\ & \text{apareix en el camí de l'arc } j \text{ dins l'arbre, i apunta} \\ & \text{cap al node destí de l'arc } j. \\ -1: & \text{si l'arc de l'arbre que hi ha per sobre del node } i \\ & \text{apareix en el camí de l'arc } j \text{ dins l'arbre, i apunta} \\ & \text{cap al node origen de l'arc } j. \\ 0: & \text{en cas contrari.} \end{cases} \tag{18}$$

Per tant, solucionar $L_1^{-1} R_1$ és equivalent a tenir els camins o cicles (que denotarem per $P_j,\ j = 1, \ldots, |A|$) de cada arc complementari j dins l'arbre d'expansió mínima que li pertoca. Donat un arc $a \in P_j$ direm que a té *orientació normal* si apunta al node origen de l'arc complementari j; en cas contrari, direm que a té *orientació inversa* (dit d'una altra forma, l'arc $a \in P_j$ té orientacio normal si $V_{j_i} = -1$, essent i

el node de la xarxa que té per sobre seu l'arc a de l'arbre; si $V_{j_i} = +1$ l'arc a tindrà orientacio inversa).

Un cop ja tenim calculat el terme $L_1^{-1}R_1$ cal veure com calcular les submatrius Q_{cm} i Q_{cb}. Això es veurà als dos apartats que segueixen.

3.1. Càlcul de Q_{cm}.

Propossició.

Si denotem per:

• a_j l'arc associat amb la j-èssima columna de Q, $j = 1, \ldots, |A|$.

• cm_i la constricció de capacitat mútua associada amb la i-èssima fila de Q, $i = 1, \ldots, |A_{cm}|$ (donat que hi ha una constricció de capacitat mútua per cada arc de la xarxa podem tractar indistintament el valor cm_i com referent a un arc o com referent a la constricció de capacitat mútua associada a aquest arc)

Llavors podem calcular la matriu Q_{cm} directament fent:

$$\underset{\substack{i=1,\ldots,|A_{cm}| \\ j=1,\ldots,|A|}}{Q_{ij}} = \begin{cases} +1, & \text{si } a_j = cm_i \\ +1, & \text{si } cm_i \in P_j \text{ amb orientació normal} \\ -1, & \text{si } cm_i \in P_j \text{ amb orientació inversa} \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Demostració.

Recordem que l'expressió de la matriu Q_{cm} és

$$Q_{cm} = R_{2_{cm}} - L_{2_{cm}} L_1^{-1} R_1$$

Així mateix cal tenir present l'aspecte de la fila i-èssima de $L_{2_{cm}}$ (que anomenarem $L^i_{2_{cm}}$): és un vector que només te K 1's a les columnes associades amb els arcs i de cada article k, $k = 1, \ldots, K$, i a la resta 0's. Considerem tots els casos possibles (obviem afegir el subíndex $_{cm}$ a les matrius per simplificar la notació):

i) $a_j = cm_i$. En aquest cas l'element $R_{2_{ij}} = +1$. Per altra banda és clar que $a_j \notin P_j \Rightarrow cm_i \notin P_j$, i llavors $(L_2 L_1^{-1} R_1)_{ij} = L_2^i V_j = 0$. Per tant $Q_{ij} = R_{2_{ij}} = +1$.

ii) $a_j \neq cm_i$. En aquest cas l'element $R_{2_{ij}} = 0$. Cal llavors observar el valor del terme $-(L_2 L_1^{-1} R_1)_{ij} = -(L_2^i V_j)$. Podem considerar dos subcasos:

ii.a) $cm_i \notin P_j$. Clarament llavors el producte $L_2^i V_j = 0$, donat que l'arc cm_i no apareix en el cicle de l'arc a_j.

ii.b) $cm_i \in P_j$. En aquest cas l'arc cm_i sí apareix en el cicle de l'arc a_j, per tant $L^i_{2_j} = 1$. Si cm_i té orientació normal a P_j llavors l'element $V_{j_i} = -1$, i per tant $Q_{ij} = -(L^i_{2_j} V_{j_i}) = -(1 \times -1) = 1$. Si per contra cm_i té orientació inversa a P_j llavors l'element $V_{j_i} = 1$, i per tant $Q_{ij} = -(L^i_{2_j} V_{j_i}) = -(1 \times 1) = -1$, amb el qual tots els casos queden tractats.

■

Algorísmicament es pot descriure el procediment per calcular Q_{cm} com:

```
{ Inicialment Q_ij = 0, ∀ i, j }
per j = 1 fins |A|
    a_j := arc_complementari_j
    si a_j ∈ A_cm llavors
        i:= índex(a_j,A_cm)
        Q_ij:= +1
    si_no
        P_j:= calcular_camí (a_j)
        per_tot a ∈ P_j fer
            si a ∈ A_cm llavors
                i:= índex(a,A_cm)
                si té_orientació_normal(a,P_j) llavors
                    Q_ij:= +1
                si_no /* orientació  inversa */
                    Q_ij:= -1
                fi_si
            fi_si
        fi_per_tot
    fi_si
fi_per
```

3.2. Càlcul de Q_{cb}.

Propossició.

Si denotem per:

- a_j l'arc associat amb la j-èssima columna de Q, $j = 1, \ldots, |A|$.
- cb_i la constricció a banda associada amb la i-èssima fila de Q, $i = |A_{cm}|+1, \ldots, |A|$.
- $B(a, n)$ una funció lògica que retorna *cert* si l'arc a apareix a la constricció a banda n, i $fals$ altrament.
- $c_{a,n}$ el coeficient de l'arc a dins la constricció a banda n.

Llavors podem calcular la matriu Q_{cb} fent:

$$\underset{\substack{i=|A_{cm}|+1,\ldots,|A| \\ j=1,\ldots,|A|}}{Q_{ij}} = \begin{cases} & \text{Fer els següents 4 pasos:} \\ 1) & \text{Inicialitzar } Q_{ij} = 0 \\ 2) & \text{si } B(a_j, cb_i) \text{ llavors } Q_{ij} = c_{a_j,cb_i} \\ & \text{per tot } a \in P_j, \text{ fer els següents 2 pasos} \\ 3) & \text{si } B(a, cb_i) \text{ i } a \text{ té orientació normal llavors} \\ & \qquad Q_{ij} = Q_{ij} + c_{a,cb_i} \\ 4) & \text{si } B(a, cb_i) \text{ i } a \text{ té orientació inversa llavors} \\ & \qquad Q_{ij} = Q_{ij} - c_{a,cb_i} \end{cases}$$

Demostració.

Es pot comprovar (més aviat que demostrar) que la metodologia anterior és correcta només observant l'expressió del càlcul de Q_{cb}:

$$Q_{cb} = R_{2_{cb}} - L_{2_{cb}} L_1^{-1} R_1$$

Llavors el terme $Q_{cb_{ij}}$ és directament:

$$Q_{cb_{ij}} = R_{2_{cb_{ij}}} - L^i_{2_{cb}} L_1^{-1} R_1^j$$
$$Q_{cb_{ij}} = R_{2_{cb_{ij}}} - L^i_{2_{cb}} V_j$$

(On $L^i_{2_{cb}}$ representa la fila i-èssima de $L_{2_{cb}}$, i R_1^j la columna j-èssima de R_1). El terme $R_{2_{cb_{ij}}}$ serà 0 si $B(a_j, cb_i) = fals$, i en cas contrari $R_{2_{cb_{ij}}} = c_{a_j, cb_i}$, amb el qual queden justificats els pasos 1) i 2).
Els pasos 3) i 4) aplicats repetidament per tot $a \in P_j$ no reflecteixen més que el producte escalar $-L^i_{2_{cb}} V_j$, tenint en compte la definició de V_j a (18), el concepte d'orientació normal i inversa —prèviament exposat— i que

$$L^i_{2_{cb_l}} = \begin{cases} c_{a_l, cb_i} & \text{si } B(a_l, cb_i) = cert \\ 0 & \text{si } B(a_l, cb_i) = fals \end{cases}$$

■

La propossició anterior ja presenta de forma algorísmica el procés de construcció de la matriu Q_{cb}, pel qual no ens estendrem més sobre com implementar aquest càlcul.

En aquesta secció hem presentat la forma de calcular la matriu Q, que era un dels objectius d'aquest treball. L'altre objectiu, l'actualització de la matriu de treball, serà presentat a la següent secció.

4. Actualització de la matriu Q.

Un cop es té formada la matriu Q cal poder resoldre els sistemes del tipus $Qx = b$ i $x^t Q = b^t$. Cal tenir en compte que el nombre d'elements no zero a Q en general és petit($< 10\%$). Per tant és recomanable usar rutines que tractin amb matrius esparses. La implementació concreta que s'ha fet del mètode realitza una descomposició LU amb pivotació parcial d'una reordenació prèvia de la matriu Q usant l'algorisme P3 de Hellerman i Rarick o una variant del mateix per tal de deixar les punxes generades al final de la matriu reordenada [3,4].

Els sistemes abans esmentats ($Qx = b$ i $x^t Q = b^t$) han de ser resolts a cada iteració del procés d'optimització. Per tant sembla lògic disposar d'un procediment per tal de no haver de calcular i fer la reinversió de Q a cada iteració. Un procés similar al que aquí descriurem ja va ser presentat a [5]. Tanmateix la tècnica introduïda en aquest treball considera constriccions a banda en la formulació del problema i sembla tenir un comportament més eficaç (estalvi d'operacions en fer l'actualització). Abans de començar, però, descriurem les particularitats que ha de tenir el mètode d'actualització de Q. Per tal de fer això descriurem els diferents tipus de pivotació que poden donar-se a la base B del mètode del particionament primal durant el procés d'optimització.

4.1. Tipus de pivotacions.

Tant si estem minimitzant (o maximitzant) una funció lineal o no lineal, els procediments algorísmics utilitzats impliquen pivotacions a la base (una variable bàsica és reemplaçada per una no–bàsica, en el cas de funció lineal, o per una superbàsica en el cas de funció no lineal —usant la metodologia de Murtagh i Saunders [6]—). Això implica que el conjunt A de constriccions a banda i de capacitat mútua actives pot variar a cada iteració (donat que les variables de tipus folga associades a aquestes constriccions poden sortir de o entrar a la base), i pot fer-ho tant pel que fa a quines constriccions hi ha actives com al nombre d'elles. Aquest darrer fet (que el nombre de constriccions actives pugui variar d'una iteració a una altra) implica que la dimensió de la nostra matriu Q no és fixa durant tot el procés (recordem que $dim(Q) = |A| \times |A|$). Llavors com a conseqüència immediata d'això tenim que el nostre mecanisme d'actualització de Q ha de ser capaç de tractar aquesta dimensionalitat variable de la matriu de treball.

Segons el tipus de variable que entra i surt de la base tenim sis pivotacions diferents. A continuació descriurem breument com afecta cada tipus de pivotació particular a la matriu Q, segons els tipus de variable que entra o surt de la base.

1) *Surt una folga o un arc complementari.*

1.a) <u>Entra: folga-Surt: folga</u>. La fila de Q associada amb la folga que entra a la base és eliminada i substituïda per una nova fila associada a la folga que surt de la base. Es modifica el conjunt A de constriccions actives, però no la seva cardinalitat $|A|$. $Dim(Q)$ no es modifica.

1.b) <u>Entra: folga-Surt: arc complementari</u>. La fila i columna de Q associades amb la folga que entra i l'arc complementari que surt de la base, respectivament, són eliminades. El conjunt A de constriccions actives es redueix en un element (degut a la folga que entra a la base). Per tant hem d'actualitzar $dim(Q) = dim(Q) - 1$.

1.c) <u>Entra: arc-Surt: folga</u>. Una nova fila associada amb la folga que surt de la base és afegida a Q. Per tal de mantenir la no–singularitat de Q una nova columna per l'arc que entra –que esdevindrà arc complementari– és també afegida a Q. El conjunt A de constriccions actives és ampliat (amb la constricció associada a la folga que entra a la base) i per tant s'ha d'actualitzar $dim(Q) = dim(Q) + 1$.

1.d) <u>Entra: arc-Surt: arc complementari</u>. La columna de Q associada amb l'arc complementari que surt de la base és eliminada, i serà reemplaçada amb la columna associada al nou arc que entra a la base (que esdevindrà arc complementari). El conjunt A no es modifica, i, per tant, $Dim(Q)$ tampoc.

2) *Surt un arc del k-èssim arbre d'expansió.*

2.a) <u>Entra: folga-Surt: arc del k-èssim arbre</u>. Un arc complementari del k-èssim article, per ex. el j-èssim arc complementari, tenint l'arc que deixa la base en el seu camí P_j, ha de ser buscat. Aquest j-èssim arc complementari sempre existirà (altrament la matriu Q esdevindria singular) i llavors passarà a formar part del k-èssim arbre d'expansió de la base. La fila i columna de Q associades amb la folga que entra i el j-èssim arc que deixa de ser complementari són eliminades. El conjunt A de constriccions actives es redueix en un element (degut a la folga que entra a la base). Per tant hem d'actualitzar $dim(Q) = dim(Q) - 1$.

2.b) Entra: arc-Surt: arc del k-èssim arbre. Un arc complementari del k-èssim article, per ex. el j-èssim arc complementari, tenint l'arc que deixa la base en el seu camí P_j, és buscat. Si aquest arc és trobat llavors reemplaçarà l'arc que surt de la base en el k-èssim arbre d'expansió, i l'arc que entra a la base esdevindrà complementari. Si cap arc complementari és trobat verificant l'abans dit, llavors l'arc que entra a la base substituirà l'arc que surt de la base dins del k-èssim arbre. Un dels dos casos anteriors ha de ser sempre possible per tal de preservar la no–singularitat de la matriu Q. El conjunt A no es modifica, i, per tant, $Dim(Q)$ tampoc.

Es pot observar a la casuística anterior com dels sis casos possibles de pivotació, en tres d'ells $dim(Q)$ no es modifica, en dos $dim(Q)$ disminueix en un, i en un cas la dimensió de Q es veu incrementada en un.

4.2. Mètode general.

En aquest subapartat descriurem la metodologia a seguir considerant una matriu general A que pot incrementar o disminuir la seva dimensió en una fila o columna a cada iteració. Més endavant centrarem l'atenció en el cas particular de tractar-se de la matriu Q.

4.2.1. Matriu estesa.

Considerem que a la iteració k recalculem la nostra matriu general A_k, que té dimensió $dim(A_k) = n_k$, i que no serà recalculada de nou fins passades i iterations (això és fins l'iteració $k+i$), on tindrà dimensió $dim(A_{k+i}) = n_{k+i}$. Donat que la dimensió de A pot incrementar-se com a molt en una fila i una columna, llavors directament tenim que $n_j \leq n_k + i$, $\forall\ j \ \ k \leq j \leq k+i$. És a dir, la dimensió màxima de la matriu A_j entre les iteracions k i $k+i$ és $n_k + i$. Llavors el mètode proposat consisteix en treballar amb la *matriu estesa* $\overline{A}_j$ a les iteracions j, $k \leq j \leq k+i$, on $\overline{A}_j$ es defineix com

$$\overline{A}_j = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_j & l_j \end{array} \\ \begin{array}{c} n_j \\ l_j \end{array} & \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Les dimensions n_j i l_j de les matriu A_j i la identitat $\mathbb{1}$ satisfan $n_j + l_j = n_k + i$, això és, la matriu estesa $\overline{A}_j$ té en tot moment la màxima dimensió que pot assolir la matriu A_j entre les iteracions k i $k+i$.

Llavors l'estructura que s'anirà mantenint actualitzada serà de fet la de les matrius esteses $\overline{A}_j$, tot i que ens interessi resoldre els sistemes $A_j x_j = b_j$ i $x_j^t A_j = b_j^t$. De fet aquest càlcul és directe a partir de $\overline{A}_j$ i treballant amb $\overline{x}_j$ i $\overline{b}_j$, extensions de

x_j i b_j de forma que

$$\overline{x}_j = \begin{array}{c} n_j \\ \\ l_j \end{array} \begin{pmatrix} x_j \\ \text{—} \\ \alpha_j \end{pmatrix} \qquad\qquad \overline{b}_j = \begin{array}{c} n_j \\ \\ l_j \end{array} \begin{pmatrix} b_j \\ \text{—} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Llavors:

$$\overline{A}_j \overline{x}_j = \overline{b}_j \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_j \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_j = 0 \\ A_j x_j = b_j \end{cases}$$

Obviant les darreres l_j components de $\overline{x}_j$ (és a dir, el terme α_j) tenim directament x_j que era el valor dessitjat. Així mateix el cost pel que fa a temps de càlcul no és gaire més elevat, ja que tan sols cal inicialitzar a 0 les darreres l_j components del vector estés $\overline{b}_j$. De forma anàloga s'opera en resoldre $x_j^t A_j = b_j^t$.

4.2.2. Actualització de la matriu estesa.

Fins ara hem vist que, pel que fa a la resolució dels sistemes dessitjats, és indiferent treballar amb la matriu A_j que amb la matriu estesa $\overline{A}_j$, amb l'avantatge de que la matriu estesa té dimensió constant. A continuació mostrarem que l'actualització de A_{j+1} en funció de A_j pot fer-se en tots els casos pre i post multiplicant la matriu A_j amb matrius etes i de permutació, sempre i quan mantinguem l'estructura abans detallada de la matriu estesa com una "condició invariant" que cal preservar a cada iteració. Considerem els casos següents:

a) Canvia una fila de A_j en passar a A_{j+1}.

En aquest cas $dim(A_j) = dim(A_{j+1}) \Leftrightarrow n_j = n_{j+1}$, $l_j = l_{j+1}$. Llavors simplement cal premultiplicar per una matriu eta fila escaient, per ex. η_j, i llavors $A_{j+1} = \eta_j A_j$. Donat que el que ens interessa és actualitzar la matriu estesa $\overline{A}_{j+1}$ en realitat el que es fa és $\overline{A}_{j+1} = \overline{\eta}_j \overline{A}_j$ (on $\overline{\eta}_j$ és la matriu estesa de η_j de forma anàloga a com abans s'ha definit $\overline{A}_j$).

b) Canvia una columna de A_j en passar a A_{j+1}.

Com al cas anterior $dim(A_j) = dim(A_{j+1})$, i només cal afegir una matriu eta columna escaient, per ex. η_j, per postmultiplicar $\overline{A}_j$, de forma que $A_{j+1} = A_j \eta_j$. Directament llavors tenim que $\overline{A}_{j+1} = \overline{A}_j \overline{\eta}_j$.

c) Eliminem una fila i una columna de A_j en passar a A_{j+1}.

En aquest cas clarament $dim(A_j) = dim(A_{j+1}) + 1 \Leftrightarrow n_{j+1} = n_j - 1$, $l_{j+1} = l_j + 1$. Considerem que volem eliminar la fila s i columna t de A_j. El primer que es farà és intercanviar la fila s amb la darrera fila de A_j (és a dir amb la fila n_j) i la columna t amb la darrera columna de A_j (que és la columna n_j). Per tal d'intercanviar les files premultiplicarem per una matriu de permutació escaient que anomenarem P_j i per intercanviar les columnes postmultiplicarem per una altra matriu de permutació, que denotarem per Q_j. Llavors tindrem la matriu intermèdia $\hat{A}_j = P_j A_j Q_j$. Cal observar que la submatriu formada per les $n_j - 1$ primeres files i columnes de $\hat{A}_j$ és la matriu A_{j+1} dessitjada (bé, realment és "gairebé" la matriu A_{j+1} dessitjada, donat que les matrius de permutació P_j i Q_j ens han situat la fila n_j de A_j a la posició s i la columna n_j a la posició t, quan el que haurien d'haver fet és avançar una posició totes les files compreses entre la fila s i la fila n_j i el mateix amb les columnes entre la t i la n_j. El que succeeix és que és més eficient en temps de càlcul fer l'intercanvi aquí proposat que el desplaçament de files i columnes. Per tant considerarem com A_{j+1} la submatriu quadrada de dimensió $n_j - 1$ de $\hat{A}_j$ abans esmentada).

Si consideréssim ara la matriu estesa $\overline{\hat{A}}_j$, la columna i fila n_j de $\hat{A}_j$ (les originals fila s i columna t de A_j) formarien part de la zona on hauria d'aparèixer la matriu identitat, donat que aquesta és la condició invariant que hem de preservar. Llavors de forma anàloga a com hem fet als casos a) i b) hem de pre i postmultiplicar $\hat{A}_j$ per matrius eta fila (η_{j_f}) i eta columna (η_{j_c}) escaients per convertir les originals fila s i columna t en una fila i columna de la matriu identitat. Si considerem tots els càlculs ja amb matrius esteses tenim finalment que $\overline{A}_{j+1} = \overline{\eta}_{j_f}\overline{P}_j\overline{A}_j\overline{Q}_j\overline{\eta}_{j_c}$.

d) Afegim una fila i una columna de A_j en passar a A_{j+1}.

En aquest cas $n_{j+1} = n_j + 1$. Sabent l'aspecte que té la matriu estesa $\overline{A}_j$ a la fila i columna $n_j + 1$ (són una fila i columna de la matriu identitat) directament podem trobar unes matrius eta fila (η_{j_f}) i eta columna (η_{j_c}) escaients per tal de transformar aquestes fila i columna en la fila i columna noves a afegir a A_{j+1}. Llavors tenim que $\overline{A}_{j+1} = \overline{\eta}_{j_f}\overline{A}_j\overline{\eta}_{j_c}$. En aquest cas es veu com és d'important mantenir la condició de que la matriu subdiagonal dreta inferior de la matriu estesa que actualitzem ha de ser igual a alguna cosa coneguda i invariant (en aquest cas la matriu identitat), ja que si no seria imposible trobar η_{j_f} i η_{j_c} tals que multiplicades per "alguna cosa" —aquesta cosa és per nosaltres coneguda perquè sabem que tenim una matriu identitat a la part subdiagonal de la matriu estesa— donessin la fila i columnes dessitjades.

Queda clar, doncs, que en tot moment podem actualitzar $\overline{A}_{j+1}$ en funció de $\overline{A}_j$ de forma $\overline{A}_{j+1} = E_j\overline{A}_jF_j$, estant formades E_j i F_j per matrius de permutació i/o matrius etes. De forma inductiva podem escriure $\overline{A}_{j+1} = E_jE_{j-1}\overline{A}_{j-1}F_{j-1}F_j$, i així podríem continuar fins arribar al punt en que vam recalcular A_k a la iteració k. Llavors podem escriure de forma general $\forall\ j,\quad k \le j < k+i,\ \overline{A}_j = E\overline{A}_kF$, on $E = \prod_{l=1}^{j-k} E_{j-l}$ i $F = \prod_{l=1}^{j-k} E_{k+l-1}$. Llavors per tal de resoldre els sistemes $\overline{A}_j\overline{x}_j = \overline{b}_j$ cal fer:

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_j\overline{x}_j &= \overline{b}_j \\
E\overline{A}_kF\overline{x}_j &= \overline{b}_j \\
\overline{A}_kF\overline{x}_j &= E^{-1}\overline{b}_j \\
\overline{A}_kz_j &= E^{-1}\overline{b}_j\ , \quad \text{on } z_j = F\overline{x}_j \\
z_j &= \overline{A}_k^{-1}E^{-1}\overline{b}_j \\
\text{I finalment } \overline{x}_j &= F^{-1}z_j
\end{aligned}
$$

És a dir, per tal de resoldre els sistemes dessitjats cal invertir els productes de matrius E i F i tenir alguna forma de calcular sistemes amb la matriu $\overline{A}_k$ (que és el mateix que calcular sistemes amb la matriu A_k) calculada a la iteració k. Pel que fa a les inverses de E i F, aquestes són directament calculables, donat que són productes de matrius etes i de permutació que tenen inverses conegudes. De fet el més fàcil és no emmagatzemar E i F com producte de matrius etes i de permutació, sinó emmagatzemar directament E^{-1} i F^{-1} com producte de les inverses de les matrius de permutació i matrius etes (que continuen essent matrius de permutació i matrius etes). Per la seva banda per tal de calcular sistemes amb la matriu A_k només cal reinvertir una vegada a la iteració k aquesta matriu, i després s'usarà la reinversió a cada iteració $j,\ k \leq j < k+i$.

Es veu clarament com el fet de treballar amb la matriu estesa (de dimensió n_k+i) elimina els problemes d'una actualització amb dimensió variable. Naturalment cal prendre un valor de i —és a dir, cada quantes iteracions recalculem la matriu A— el suficientment "bo": és a dir ni massa petit (sinó estaríem recalculant i invertint la matriu A massa vegades) ni massa gran (ja que llavors la dimensió de la matriu estesa seria gran i, a més, augmentaríem els possibles errors de precissió creats en afegir matrius etes i de permutació a cada iteració). Un punt important és el fet de mantenir a la matriu estesa el bloc diagonal de la part dreta inferior igual a la matriu identitat. Aquest condició s'ha de considerar com una "condició invariant", que s'ha de preservar en tot moment, i gràcies a ella sabrem com passar de A_j a A_{j+1}. Es podria haver escollit una altra condició invariant (per exemple, mantenir no la matriu identitat sinó una matriu diagonal de dosos) i tenint en compte això tot funcionaria d'igual forma. Tanmateix s'ha escollit la matriu identitat perquè simplifica el procés d'actualització.

4.3. Mètode general aplicat a la matriu Q en particular.

En aquesta secció es particularitzarà la metodologia descrita a l'apartat anterior en el cas concret de que la matriu A a actualitzar sigui la matriu Q del mètode del particionament primal. Es tractarà l'actualització de Q pels sis casos possibles de pivotació que poden haver al mètode del particionament primal, tal i com s'ha descrit a apartats anteriors. Es farà una divisió clara en la forma d'actualitzar segons abandonin la base o bé una variable folga o arc complementari, o bé una variable pertanyent a un arbre bàsic. Els dos tipus d'actualització es tractaran en dos apartats diferents. Previament, però, introduirem uns conceptes previs comuns a ambdós tipus d'actualitzacions (una altra descripció d'aquests conceptes previs pot ser trobada a [5]).

4.3.1. Conceptes previs.

Recordem que al mètode del particionament primal la base a la iteració qualsevol i pot ser escrita com:

$$B_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline L_1 & R_1 & 0 \\ \hline L_2 & R_2 & 0 \\ \hline L_3 & R_3 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

Considerem ara la matriu L_i que definirem com:

$$L_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbb{1} & -L_1^{-1}R_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

Llavors el producte $B_i^* = B_i L_i$ és:

$$B_i^* = B_i L_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline L_1 & R_1 & 0 \\ \hline L_2 & R_2 & 0 \\ \hline L_3 & R_3 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbb{1} & -L_1^{-1}R_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|cc|} \hline L_1 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{0} \\ \hline L_2 & \multicolumn{2}{c|}{Y_i} \\ \cline{1-1} L_3 & & \\ \hline \end{array}$$

On Y_i es defineix com:

$$Y_i = \begin{array}{|c|c|} \hline R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1 & 0 \\ \hline R_3 - L_3 L_1^{-1} R_1 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Q_i & 0 \\ \hline D_i & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \tag{19}$$

Cal observar que la submatriu diagonal superior de Y_i correspon exactament amb la matriu de treball Q del mètode del particionament primal. Llavors actualitzar $Q_{i+1} = f(Q_i)$ es redueix a actualitzar $Y_{i+1} = f(Y_i)$.

Cada pivotació a la base B_i implica un canvi de columna a la mateixa. Aquesta operació pot ser representada matricialment mitjançant un producte amb una matriu eta (o matriu de permutació en el cas de que en comptes d'introduir una nova variable el que fem sigui permutar dues columnes de la base actual; de totes formes tant en un cas com a l'altre representarem sempre amb η la matriu usada per fer l'actualització, on η tant pot ser una matriu eta com una de permutació) de forma $B_{i+1} = B_i \eta$ —eliminem el subíndex $_i$ de la matriu eta per simplificar la notació—. Tenint en compte la definició de B_i^* i l'expressió d'actualització de B_i a base de matrius η, obtenim:

$$\begin{aligned} B_{i+1}^* &= B_{i+1} L_{i+1} \\ B_{i+1}^* &= B_i \eta L_{i+1} \\ B_{i+1}^* &= B_i^* L_i^{-1} \eta L_{i+1} \end{aligned} \tag{20}$$

Directament de l'expressió (20) obtenim (fent la inversa de la part dreta i esquerra):

$$B_{i+1}^{*^{-1}} = L_{i+1}^{-1}\eta^{-1}L_iB_i^{*^{-1}} \tag{21}$$

De fet pels nostres propòsits serà més útil l'expressió amb la inversa (21) que l'equació (20). Per tal d'expressar l'equació (21) de forma matricial simplificada, considerarem les següents particions de les matrius B_i^* i L_i :

$$B_i^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline L_1 & 0 & 0 \\ \hline L_2 & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \cline{1-1} L_3 & \multicolumn{2}{c|}{\smash{Y_i}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline C_i & 0 \\ \hline A_i & Y_i \\ \hline \end{array} \quad \text{on} \quad C_i = L_1 \;,\; A_i = \begin{array}{|c|}\hline L_2 \\ \hline L_3 \\ \hline \end{array}$$

$$L_i = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbb{1} & -L_1^{-1}R_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & V_i \\ \hline 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \quad \text{on} \quad V_i = \begin{array}{|c|c|}\hline -L_1^{-1}R_1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

A l'expressió (21), però, són necessàries les inverses de les matrius L_{i+1} i B_i^*. A partir del particionament anterior pot veure's que les inverses anteriors poden expressar-se de forma:

$$L_{i+1}^{-1} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & -V_{i+1} \\ \hline 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \qquad B_i^{*^{-1}} = \begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_i & 0 \\ \hline \overline{A}_i & Y_i^{-1} \\ \hline \end{array} \quad \text{on } \overline{\mathrm{C}}_\mathrm{i} = \mathrm{C}_\mathrm{i}^{-1} \;\text{ i }\; \overline{\mathrm{A}}_\mathrm{i} = -\mathrm{A}_\mathrm{i}\mathrm{C}_\mathrm{i}^{-1}\mathrm{Y}_\mathrm{i}^{-1}$$

Per tant l'equació (21) en forma matricial pot ser escrita com:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_{i+1} & 0 \\ \hline \overline{A}_{i+1} & Y_{i+1}^{-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & -V_{i+1} \\ \hline 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}\,\eta^{-1} \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & V_i \\ \hline 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_i & 0 \\ \hline \overline{A}_i & Y_i^{-1} \\ \hline \end{array} \tag{22}$$

A partir de l'expressió (22) es pot obtenir la formulació per tal d'actualitzar Q. En fer l'actualització distingirem dos casos segons el tipus de variable que surt de la base, el qual modifica substancialment l'aspecte de la matriu η^{-1} (encara no descrita amb molt detall) que apareix a l'equació (22). Presentem a continuació els dos casos esmentats en funció de la variable que deixa la base. Caldrà tenir present en tot moment, però, que la matriu que actualitzarem realment serà: $\overline{Q}_i = \begin{pmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

4.3.2. Surt de la base una folga o arc complementari.

Aquest és el primer dels casos descrit a la secció 4.1, que alhora es subdivideix en quatre casos més. En sortir una folga o un arc complementari de la base les submatrius $L_1,\ L_2\ i\ L_3$ resten intactes, i la matriu η de l'equació (22) per reflectir el canvi a la base i la seva inversa seran de la forma:

$$\eta = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \eta_2 \\ \hline 0 & \eta_4 \end{array}\right] \qquad \eta^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \overline{\eta}_2 \\ \hline 0 & \eta_4^{-1} \end{array}\right] \text{ on } \overline{\eta}_2 = -\eta_2\eta_4^{-1}$$

Tenint en compte que la inversa d'una matriu eta també és una matriu eta, llavors la matriu η^{-1} ha de ser matriu eta, i per tant també ho seran les matrius $\overline{\eta}_2$ i η_4^{-1} en particular. Substituïnt el valor de η^{-1} anterior a l'equació (22) obtenim:

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{C}_{i+1} & 0 \\ \hline \overline{A}_{i+1} & Y_{i+1}^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & -V_{i+1} \\ \hline 0 & \mathbb{1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \overline{\eta}_2 \\ \hline 0 & \eta_4^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & V_i \\ \hline 0 & \mathbb{1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{C}_i & 0 \\ \hline \overline{A}_i & Y_i^{-1} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{C}_{i+1} & 0 \\ \hline \overline{A}_{i+1} & Y_{i+1}^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \overline{\eta}_2 - V_{i+1}\eta_4^{-1} \\ \hline 0 & \eta_4^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{C}_i + V_i\overline{A}_i & V_iY_i^{-1} \\ \hline \overline{A}_i & Y_i^{-1} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{C}_{i+1} & 0 \\ \hline \overline{A}_{i+1} & Y_{i+1}^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & \eta_4^{-1}Y_i^{-1} \end{array}\right]$$

(A l'expressió anterior els termes $*$ serien els resultats obtinguts en fer el producte per blocs, obviats aquí per no complicar la notació i ser del tot irrellevants pels nostres propòsits). Igualant per blocs directament s'obté:

$$Y_{i+1}^{-1} = \eta_4^{-1}Y_i^{-1} \Longleftrightarrow Y_{i+1} = Y_i\eta_4 \tag{23}$$

Cal recordar que la columna eta de η_4 (la única que és diferent de 0 i necessària per fer l'actualització) és un valor ja calculat prèviament durant el procés d'optimització. Aquesta columna eta és de fet el vector P trobat en resoldre $BP = N$, essent B la base en el moment actual i N una columna associada amb una variable no bàsica (en el cas lineal) o superbàsica (en el cas no lineal). A continuació, i basant-nos en l'equació (23) per tal de fer l'actualització, descriurem cadascun dels quatre subcasos possibles que poden donar-se.

1.a) Entra: folga - Surt: folga.

La folga que entra a la base es trobava associada a una constricció (a banda o de capacitat mútua) saturada, i per tant, li corresponia una fila dins la matriu Q_i. Aquesta fila serà substituïda per una fila amb la constricció (a banda o de capacitat mútua) associada a la folga que surt de la base —és a dir, la constricció associada a aquesta folga que surt de la base es transforma en constricció activa. Per tant l'operació que fem és substituir una fila de Q_i —sigui la fila r, Q_i^r— per una fila de D_i —sigui la fila s, D_i^s—, estant definida D_i a l'expressió (19). La dimensió de la matriu Q no varia en aquest cas.

Recordant el dit al mètode general per qualsevol matriu, en aquest cas només cal premultiplicar la matriu Q_i per una matriu eta fila escaient. Per trobar aquesta matriu eta fila, resolem en primer lloc el sistema

$$\gamma^t Q_i = D_i^s$$

i ara la matriu eta fila serà:

$$\eta_f = \text{ fila r } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & fila & amb & el & vector & \gamma^t & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

L'actualització de Q_{i+1} en funció de Q_i queda en aquest subcàs finalment com:

$$Q_{i+1} = \eta_f Q_i$$

Recordem, però, que el que realment hem d'actualitzar és la matriu estesa $\overline{Q}_{i+1}$. Donat que no hi ha hagut canvi de dimensio en la matriu de treball, en aquest cas directament s'obté:

$$\overline{Q}_{i+1} = \overline{\eta}_f \overline{Q}_i$$

Pel que fa al cost computacional, en aquest subcàs l'únic càlcul a fer és trobar el vector γ de la matriu η_f.

1.b) Entra: folga - Surt: arc complementari.

Les operacions que s'han de realitzar ara són: (i) eliminar la fila r de Q_i associada a la folga que entra a la base i (ii) eliminar la columna s de Q_i associada l'arc complementari que surt de la base. En aquest cas la matriu de treball disminueix en un la seva dimensió ($n_{i+1} = n_i - 1$). Això implica que la part de la matriu estesa $\overline{Q}_{i+1}$ corresponent a la submatriu diagonal inferior amb la identitat augmentarà la seva dimensió en un ($l_{i+1} = l_i + 1$). Per tant cal situar la fila r i columna s a la part de la submatriu identitat, i posteriorment convertir-les en una fila i columna de la identitat.

Per tal de realitzar l'abans dit, i seguint la metodologia general exposada a seccions anteriors, premultiplicarem Q_i amb la matriu de permutació P_r (per intercanviar la fila r i n_i), i postmultiplicarem amb la matriu P_s per intercanviar les columnes s i n_i. Obtenim d'aquesta manera una matriu intermèdia $\hat{Q}_{i+1} = P_r Q_i P_s$. Ara cal convertir la fila i columna n_i de $\hat{Q}_{i+1}$ (les originals fila r i columna s) en una fila i columna de $\mathbb{1}$. Per fer això haurem de trobar unes matrius eta fila η_f i eta columna η_c que pre i postmultiplicaran a $\hat{Q}_{i+1}$.

Primer veiem com trobar η_c. Si recordem la fórmula (23) per tal d'actualitzar la matriu Y_{i+1} i l'expressem en forma de matrius per blocs tenim:

$$Y_{i+1} = \begin{array}{|c|c|} \hline Q_i & 0 \\ \hline D_i & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \; \eta_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline Q_i & 0 \\ \hline D_i & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|} \hline \eta_5 & 0 \\ \hline \eta_6 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

on hem particionat η_4 de forma escaient. Observem per tant com directament la submatriu η_5 el que fa es transformar la columna original s de Y_i que sortia de la base en una columna identitat. Llavors directament tenim que la matriu η_c dessitjada és $\eta_c = \eta_5$ (i recordem que η_4 és ja una matriu coneguda, cosa que ens estalvia temps de càlcul per trobar η_c).

Per tal de trobar η_f operarem com al subcàs (1.a). Llavors buscarem un vector γ tal que

$$\gamma(\hat{Q}_{i+1}\eta_c) = e_{n_i}$$

essent e_{n_i} l'n_i-èssim vector de la matriu identitat. Amb aquest vector γ formem llavors directament la matriu η_f, amb γ situat a la fila n_i-èssima.

Finalment l'actualització en aquest subcàs queda com:

$$Q_{i+1} = \eta_f \hat{Q}_{i+1} \eta_c$$
$$Q_{i+1} = \eta_f P_r Q_i P_s \eta_c$$

Donat que hem d'actualitzar la matriu estesa, directament escrivim:

$$\overline{Q}_{i+1} = \overline{\eta}_f \overline{P}_r \overline{Q}_i \overline{P}_s \overline{\eta}_c$$

Observem com l'únic càlcul necessari en aquest cas torna a ser trobar el vector γ de la matriu η_f.

1.c) <u>Entra: arc - Surt: folga.</u>

En aquest cas la matriu Q_{i+1} s'amplia amb una nova fila (associada a la constricció a banda o de capacitat mútua de la folga que surt a la base) i amb una nova columna (associada a l'arc que entra a la base i que esdevindrà arc complementari). Per tant en aquest cas la dimensió n_{i+1} de Q_{i+1} serà $n_{i+1} = n_i + 1$, i conseqüentment la submatriu identitat diagonal inferior de $\overline{Q}_{i+1}$ disminuirà la seva dimensió respecte la iteració anterior, és a dir $l_{i+1} = l_i - 1$.

La nova fila a afegir a la nova Q_{i+1} serà una fila pertanyent a la submatriu D_i de (19). Considerem que sigui la fila s, D_i^s. Llavors ens interessa poder arribar a una expressió del tipus:

$$Q_{i+1} = \left[\begin{array}{c:c} Q_i & 0 \\ \hdashline D_i^s & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & & & \\ & \ddots & & \gamma \\ & & 1 & \end{array}\right]$$

essent γ la columna eta de la matriu η_c. Recordant de nou la fórmula (23) d'actualització de Y_{i+1} per blocs:

$$Y_{i+1} = \left[\begin{array}{c|c} Q_i & 0 \\ \hline D_i & \mathbb{1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \eta_5 & 0 \\ \hline \eta_6 & \mathbb{1} \end{array}\right]$$

observem que la submatriu η_5 ens afegeix la columna associada amb l'arc que entra a la base. Per tant directament tenim que $\eta_c = \eta_5$. Podem observar que, llavors, l'actualització pot ser escrita com:

$$Q_{i+1} = \left[\begin{array}{c:c} Q_i & 0 \\ \hdashline D_i^s & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \eta_5 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} Q_i & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} \mathbb{1} & 0 \\ \hdashline D_i^s & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \eta_5 \end{array}\right]$$

Com s'observa, per tal de poder fer l'actualització de Q_{i+1} d'aquesta forma és necessari tenir una fila i columna de la matriu identitat a la posició n_{i+1} (posició de les noves fila i columna afegides a la matriu de treball). Però, donat que el que fem és actualitzar la matriu estesa de $\overline{Q}_{i+1}$ aquesta condició ja es verifica, ja que la matriu diagonal inferior de la matriu estesa és precissament la matriu identitat. Per tant podem escriure l'actualització de la matriu estesa d'aquest subcàs com:

$$\overline{Q}_{i+1} = \overline{Q}_i \overline{\eta}_f \overline{\eta}_c$$

essent $\overline{\eta}_f$ la matriu eta fila amb el vector eta D_i^s a la posició n_{i+1}. Pel que fa al cost computacional s'observa que tan sols és necessari calcular $D_i^s = (R_3 - L_3 L_1^{-1} R_1)^s$ per tenir η_f; a diferència dels casos anteriors calcular la matriu η_f no suposa resoldre cap sistema d'equacions amb Q_i.

1.d) Entra: arc - Surt: arc complementari.

En aquest cas la dimensió de la matriu de treball no varia. L'única operació a fer és substituir la columna associada a l'arc complementari que deixa la base per una altra associada a l'arc que entra a la base, el qual esdevindrà complementari. Directament a partir de la fórmula (23) considerant les matrius particionades per blocs, tal i com s'ha fet als subcasos anteriors, obtenim l'actualització per aquest subcàs (directament l'escrivim en forma de matrius esteses):

$$\overline{Q}_{i+1} = \overline{Q}_i \overline{\eta}_c \ , \quad \text{on } \overline{\eta}_c = \overline{\eta}_5$$

Com s'observa aquest cas no necessita de cap càlcul suplementari.

4.3.3. Surt de la base un arc del k-èssim arbre d'expansió.

Tal i com vam detallar en apartats anteriors, en el cas de sortir un arc pertanyent a l'arbre d'expansió mínima de l'article k mirarem si existeix algun arc complementari del mateix article que el pugui substituir (en el cas que la variable que entri a la base sigui una folga aquest arc existirà sempre, mentre que en el cas de que entri un arc pot o no existir).

Considerem que deixa la base l'arc s de l'arbre per l'article k, B_k. El conjunt de camins dels arcs complementaris de l'article k es representen mitjançant $V_k = B_k^{-1} R_{1_k}$. Llavors la condició de "veure si algun arc complementari pot substituir a l'arc s que deixa la base" és equivalent a "buscar algun arc complementari tal que en el seu camí aparegui l'arc s". A partir de V_k (que ens dóna tots els camins dels arcs complementaris de l'article k) aquesta darrera condició es redueix a veure si $\gamma = V_k^s$ és o no un vector igual a 0 (on V_k^s representa la fila s de V_k). Llavors segons $\gamma = 0$ o $\gamma \neq 0$ tindrem els dos subscasos que a continuació descriurem.

2.a) $\gamma = 0$.

En aquest cas cap arc complementari pot ser intercanviat per l'arc que surt de l'arbre d'expansió mínima. Llavors el nou arc entrant substituirà l'arc que surt dins l'arbre. Implícitament assumim, aleshores, que quan $\gamma = 0$ la variable que entra a la base ha de ser un arc i no una folga (en cas de que fos una folga no podríem mantenir l'arbre d'expansió mínima i la base esdevindria singular). A partir de la definició de Q, l'expressió de la nova Q_{i+1} serà ara:

$$Q_{i+1} = R_{2_{i+1}} - L_{2_{i+1}} (L_{1_{i+1}}^{-1} R_{1_{i+1}})$$

on es verifica que $R_{2_{i+1}} = R_{2_i}$ i que L_{2_i} i $L_{2_{i+1}}$ només difereixen en la columna associada amb els arcs que han estat intercanviats (arc que ha sortit i arc que ha entrat). Pel que fa al terme $L_{1_{i+1}}^{-1} R_{1_{i+1}}$ amb els camins dels complementaris dins els arbres, hem de tenir en compte que $R_{1_{i+1}} = R_{1_i}$ (és a dir, el conjunt d'arcs complementaris roman invariable), mentre que $L_{1_{i+1}}$ i L_{1_i} difereixen (igual a com passava amb L_2) en la columna de l'arc sortint/entrant. Donat que l'únic canvi que hi hagut en els arbres bàsics ha estat el reemplaçament de l'arc que ha sortit de B_k (que anomenarem a_s) pel que ha entrat (representat per a_e), llavors la única possible diferència en els camins pot ser que l'arc a_e aparegui al camí d'algun arc complementari de l'article k. La següent propossició demostra que això no és possible.

Propossició.

Sigui a_s l'arc que surt de B_k, a_e l'arc que el reemplaçarà a B_k, R_{1_k} el conjunt d'arcs complementaris de l'article k, i cicle(a) el conjunt d'arcs de B_k que formen el cicle de l'arc a.

Si $\forall a \in R_{1_k},\ a_s \notin \text{cicle}(a)$ llavors també es verificarà després de fer la pivotació que $a_e \notin \text{cicle}(a)$

Demostració.

Suposem que després de fer la pivotació $\exists a \in R_{1_k}$ tal que $a_e \in \text{cicle}(a)$. Això implica que hem hagut de trencar en pivotar el cicle previ de a per a que pogués entrar a_e. Però per a trencar el cicle previ de a la única possibilitat és que l'arc que surt a_s estigui contingut en ell. Però això contradiu la hipòtesi inicial de que $\forall a \in R_{1_k},\ a_s \notin \text{cicle}(a)$. Per tant no pot haver cap arc a tal que $a_e \in \text{cicle}(a)$.

■

Llavors tenim que els camins dels arcs complementaris no queden modificats tampoc en fer la pivotació. A més a l'expressió $Q_{i+1} = R_{2_{i+1}} - L_{2_{i+1}}(L_{1_{i+1}}^{-1} R_{1_{i+1}})$, donat que l'arc a_e no apareix dins cap camí dels complementaris —tot i que $L_{2_{i+1}}$ s'hagi modificat just en la columna de a_e— el terme $L_{2_{i+1}}(L_{1_{i+1}}^{-1} R_{1_{i+1}})$ no varia respecte la iteració anterior. Llavors tenim directament que

$$Q_{i+1} = Q_i \Longleftrightarrow \overline{Q}_{i+1}\overline{Q}_i$$

En aquest cas, doncs, la matriu de treball roman invariant en fer la pivotació.

2.b) $\underline{\gamma \neq 0.}$

En aquest cas l'actualització es fa en dues etapes:

i) En primer lloc prenem una posició r de γ tal que $\gamma_r \neq 0$. Llavors substituirem les columnes associades a l'arc s que surt de la base i l'arc complementari r. És a dir, el que fem realment és una permutació de dues columnes que ens preserven l'estructura general de la nostra base (aquesta és: tenir arbres d'expansió mínima per una banda i arcs complementaris per una altra).

ii) Ara l'arc r que havíem de treure de la base es troba com arc complementari. Llavors en aquest segon pas el que hem de fer és aplicar la metodologia proposada als subcasos ja presentats segons la variable a entrar sigui una folga (amb el qual aplicarem el subcàs 1.b) o un arc (aplicant llavors el subcàs 1.d). Ara, però, en aplicar els subcasos 1.b o 1.d no disposarem directament del valor de la matriu $\eta_c = \eta_5$ com abans, i caldrà calcular-la.

Centrem-nos, però, en la primera de les etapes abans esmentades (on permutem l'arc s que deixa un arbre generador, i l'arc r complementari). Recordant l'expressió matricial (22) per fer l'actualizació de B_{i+1}^*, veiem que en aquest cas la matriu η^{-1} no és realment una matriu eta, sinó una matriu de permutació (entre les columnes dels arcs r i s). En comptes de parlar de matriu η ho farem de matriu P de permutació de dues columnes. Cal tenir en compte que en aquest cas $PP = \mathbb{1} \Leftrightarrow P = P^{-1}$. Llavors avaluant l'expressió (22) obtenim:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_{i+1} & 0 \\ \hline \overline{A}_{i+1} & Y_{i+1}^{-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & -V_{i+1} \\ \hline 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|}\hline P_1 & P_2 \\ \hline P_3 & P_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & V_i \\ \hline 0 & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_i & 0 \\ \hline \overline{A}_i & Y_i^{-1} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_{i+1} & 0 \\ \hline \overline{A}_{i+1} & Y_{i+1}^{-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline P_1 - V_{i+1}P_3 & P_2 - V_{i+1}P_4 \\ \hline P_3 & P_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_i + V_i\overline{A}_i & V_iY_i^{-1} \\ \hline \overline{A}_i & Y_i^{-1} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \overline{C}_{i+1} & 0 \\ \hline \overline{A}_{i+1} & Y_{i+1}^{-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline * & * \\ \hline * & (P_3V_i + P_4)Y_i^{-1} \\ \hline \end{array}$$

(A l'expressió anterior els termes $*$ serien els resultats obtinguts en fer el producte per blocs, obviats aquí per no complicar la notació i ser del tot irrellevants pels nostres propòsits). Igualant per blocs tenim que

$$Y_{i+1}^{-1} = (P_3V_i + P_4)Y_i^{-1} \tag{24}$$

Donat que la matriu Q_i és una submatriu de Y_i (així com Q_{i+1} ho és de Y_{i+1}) tenim una forma d'actualitzar la matriu de treball en el cas de permutar els arcs r i s.

Per tal de poder desenvolupar l'expressió (24) detallarem amb més precissió la matriu P per tal de poder conèixer l'aspecte de P_3 i P_4. Sabent que m és el nombre de nodes de la xarxa, n és el nombre d'arcs de la xarxa, K el nombre total d'articles, k l'article de l'arc s que deixa l'arbre B_k, r l'arc complementari que substituirà s dins B_k i $R^* = \sum_{l=1}^{k} |R_{1_l}|$ el nombre d'arcs complementaris fins l'article k (on $|R_{1_l}|$ indica el nombre d'arcs complementaris de l'article l), podem escriure P com:

$$P = \begin{array}{r} \\ \\ \\ (k-1)m+s \rightarrow \\ \\ \\ \\ Km+R^*+r \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \overset{(k-1)m+s}{\downarrow} & & & \overset{Km+R^*+r}{\downarrow} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Sabent que $dim(P) = (Km+n) \times (Km+n)$, llavors les submatrius P_3 i P_4 ocupen les n darreres files de P; d'aquestes P_3 ocupa les Km primeres columnes i P_4 les n darreres (és a dir $dim(P_3) = n \times Km$, i $dim(P_4) = n \times n$. L'aspecte d'aquestes matrius és:

$$P_3 = \begin{array}{cc} & \scriptstyle (k-1)m+s \\ & \downarrow \\ \scriptstyle R^*+r \rightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} ; P_4 = \begin{array}{cc} & \scriptstyle R^*+r \\ & \downarrow \\ \scriptstyle R^*+r \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donat que $V_i = -L_1^{-1} R_1$, llavors pot expressar-se com una matriu diagonal per blocs de forma:

$$V_i = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \scriptstyle |R_{1_1}| & & \scriptstyle |R_{1_K}| \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \scriptstyle m \rightarrow \\ \\ \scriptstyle m \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} -B_1^{-1} R_{1_1} & & \\ & \ddots & \\ & & -B_K^{-1} R_{1_K} \end{pmatrix} \end{array}$$

Llavors si calculem l'expressió $P_4 + P_3 V_i$ (que anomenarem P_5) de l'equació (24) deforma matricial tenim:

$$P_5 = P_4 + P_3 V_i = P_4 + \begin{array}{cc} & \scriptstyle (k-1)m+s \\ & \downarrow \\ \scriptstyle R^*+r \rightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \scriptstyle |R_{1_1}| & & \scriptstyle |R_{1_K}| \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \scriptstyle m \rightarrow \\ \\ \scriptstyle m \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} -B_1^{-1} R_{1_1} & & \\ & \ddots & \\ & & -B_K^{-1} R_{1_K} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{cc} & \scriptstyle R^*+r \\ & \downarrow \\ \scriptstyle R^*+r \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \scriptstyle |R_{1_k}| \\ & \downarrow \\ \scriptstyle R^*+r \rightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & (B_k^{-1} R_{1_k})^s & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} |R_{1_k}| \\ \downarrow \end{array} \\
R^*+r \rightarrow & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & (B_k^{-1}R_{1_k})^s & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

On $(B_k^{-1}R_{1_k})^s$ no és més que l'afectació de l'arc s als camins dels arcs complementaris de l'article k, cosa que coincideix exactament amb el vector γ que prèviament ja hem calculat. Per tant $(B_k^{-1}R_{1_k})^s = \gamma$, i la matriu $P_5 = P_4 + P_3V_i$ és directament calcul.lable. A més P_5 és una matriu eta fila (cosa que fa que la seva inversa sigui immediata). Llavors l'expressió (24) d'actualització pot ser escrita com $Y_{i+1}^{-1} = P_5Y_i^{-1}$. Donat que només ens interessa actualitzar Q_{i+1} (la submatriu diagonal superior de Y_{i+1}) realitzem un particionament escaient de P_5 i prenem la submatriu diagonal superior (amb les dimensions correctes per tal de poder premultiplicar Q_i^{-1}) que anomenarem P_6. Llavors tenim que $Q_{i+1}^{-1} = P_6Q_i^{-1}$. Llavors la fórmula d'actualització de Q_{i+1} serà directament $Q_{i+1} = Q_iP_6^{-1}$, on P_6^{-1} és immediat ja que P_6 continua essent una matriu eta fila. Finalment es pot escriure, considerant la matriu estesa:

$$\overline{Q}_{i+1} = \overline{Q}_i\overline{P}_6^{-1}$$

Clarament el cost per dur a terme aquesta operació és nul, ja que el vector γ (la única cosa necessària) ja estava calculat prèviament.

Amb aquest darrer cas l'actualització de la matriu de treball queda complertada, assolint el darrer objectiu d'aquest treball.

REFERÈNCIES

[1] Bradley, G.H.; G.G. Brown i G.W. Graves. 1977. *Design and implementation of large scale primal transshipment algorithms.* Management Science, Vol.24, N.1, pp 1-34.

[2] Castro, J. i N. Nabona. 1994. *Nonlinear multicommodity network flows through primal partitioning and comparison with alternative methods.* System Modelling and Optimization. Proceedings of the 16th IFIP Conference. J. Henry and J.-P. Yvon editors. pp. 875-884. Springer-Verlag.

[3] Duff, I.S.; A.M. Erisman i J.K. Reid. 1986. *Direct Methods for Sparse Matrices.* Oxford University Press, New York.

[4] Hellerman, E i D. Rarick. 1971. *Reinversion with the preassigned pivot procedure.* Mathematical Programming, v. 1, pp. 195-216.

[5] Kennington, J.L. i R.V. Helgason. 1980. *Algorithms for network programming.* John Wiley & Sons, New York.

[6] Murtagh, B.A. i M.A. Saunders. 1978. *Large-scale linearly constrained optimization.* Mathematical Programming, v. 14, pp. 41-72